228
2024.3.1
学会ニュース
The Academic Society of Tokyo Woman's Christian University

▶ 2023年度 東京女子大学学会主催 公開連続講演会

公開連続講演会「神秘的な数学の世界」を終えて

数理科学科数学専攻教授　厚　芝　幸　子

2023年度数学部会の公開連続講演会は「神秘的な数学の世界」というテーマで実施した。世の中では、算数・数学嫌いの人が多いことなど、とかく数学に対するマイナスイメージの声が聞こえる。考える楽しみを与えてくれる数学、様々な問題解決力に結び付く数学などなど、こうした数学の持つ面白さ、美しさや不思議な魅力を味わうことができる場が少なくなってきていることもマイナスイメージの一因になっているのかもしれない。そのような中、数学の美しさ、楽しさを伝えたいと4人の先生方が本公開連続講演会講師をお引き受けくださった。

本公開連続講演会の第1回は代数解析学がご専門の本学名誉教授 大阿久俊則先生に「代数解析学の考え方とその応用―微分方程式と超関数と確率分布」という題目で講演していただいた。歴史的背景から応用的な話まで、予備知識を前提とせずにわかりやすく解説してくださった。代数解析学・D加群の奥深さが感じられ、さらに続けて詳しく聴きたいと感じる講演だった。そのため、多くの聴講者が自然と引き込まれ、大変良い表情で聴講していた会場の様子も印象的だった。第2回は調和解析学がご専門の本学名誉教授 宮地晶彦先生に「フーリエ解析とその応用」という題目で講演していただいた。日程柄1年生の聴講予定者も多く、開催前は1年生には難しいかなとの懸念があった。しかし、実際には1年生も、あまり数学が得意でない人でも理解できる箇所が織りまぜられており、先生の優しいお人柄がにじみ出ている講演だった。第3回は位相幾何学の中でも特に結び目理論・空間グラフ理論がご専門の早稲田大学教授 谷山公規先生に「知恵の輪のトポロジー」という題目で講演していただいた。紐を使った実演・実習などもあり、正真正銘の「参加型講演会」だった。また、くすっと笑いを誘う話も多く、数学があまり得意でない人にもいろいろな意味での数学の面白さが伝わる、和やかで明るく楽しい雰囲気の講演だった。第4

回は代数学の中でも特に有限群論がご専門の東京医科歯科大学名誉教授 清田正夫先生に「有限群とその表現」という題目で講演していただいた。予備知識を持たない人にもわかりやすく、群の定義からはじめて、群の例を4つほどあげながら、有限群論の基礎概念を解説してくださった。次に表現論の基本事項を解説し、表現論の応用としてバーンサイドの定理まで解説してくださった。予備知識を前提としないところから始められ、例もあげながらの内容であったので、多くの聴講者も大変興味深く聴講できたようだった。

本公開連続講演会は4人の講師のご尽力により、参加者おひとりおひとりにとって、数学の持つ面白さ、美しさや不思議な魅力の一端に触れる貴重な機会になったと思う。聴講者の1年生の中には、「授業とは違う本格的な講演の聴講は初めてだ。ドキドキしながら参加したけれど、迫力ある講演を聴けて良い刺激になった。これからは数学をもっと頑張って勉強しようと思う」と感想を述べてくれた人がいたことも印象的だった。また、全4回のうち複数回に、人によっては全4回に参加なさった聴講者も以外に多かった。回を重ねていくうちに、中には見ず知らずだった人たちが「知り合い」になって挨拶し、各講演会前後の時間に明るく楽しそうに歓談している様子を拝見することができ、こちらも嬉しく感じた。たわいないことと思えるかもしれないが、これも本公開連続講演会を対面で実施したことによるメリットの一つかと思う。

多くの参加者にとって、本公開連続講演会は数学の持つ面白さ、美しさや不思議な魅力の一端に触れる貴重な機会になり、また今後につながる良い刺激を受ける機会にもなったと思う。私自身にとっては、「いかにして面白さ・美しさを伝えるか」という点でも大変勉強になった。4人の講師に心よりお礼を申し上げます。また、対面形式での公開講演会開催ということもあり、学会委員長 白井恵一先生、学会事務局職員、管財課や門衛の皆様、数理科学科教職員をはじめ、多くの方々に大変お世話になった。この場をかりて、心よりお礼を申し上げます。

2023年度 東京女子大学学会主催 公開連続講演会

神秘的な数学の世界

（企画：数学部会）

(1) 代数解析学の考え方とその応用
— 微分方程式と超関数と確率分布

東京女子大学名誉教授　**大阿久　俊　則**

---

(2) フーリエ解析とその応用

東京女子大学名誉教授　**宮　地　晶　彦**

---

(3) 知恵の輪のトポロジー

早稲田大学教授　**谷　山　公　規**

---

(4) 有限群とその表現

東京医科歯科大学名誉教授　**清　田　正　夫**

代数解析学の考え方とその応用
― 微分方程式と超関数と確率分布

東京女子大学名誉教授　大阿久　俊　則

現代数学における代数解析学とは、ライプニッツ、オイラー、ラグランジュなどによる古典的な代数解析（微積分を4則演算の拡張として代数的に扱う）の精神を現代数学に蘇らせようという理念により佐藤幹夫（1928-2023）が創始した研究分野である。佐藤は独自の超関数論（関数概念の拡張）の発表（1958年）を嚆矢として、若い研究者達との共同研究によりその構想を次々に実現した。その中でも特にD加群理論と超局所解析は、解析学にとどまらず現代数学全般に広範な影響を及ぼしている。佐藤はその功績により文化功労者顕彰を含む多くの国内外の賞を受賞し、「代数解析学」という分野は国際的にも認知されるようになった。D加群理論は連立線形微分方程式の代数解析として佐藤により1960年頃に構想され、1968年以降、柏原正樹をはじめとする国内外の多くの数学者によって壮大な理論が構築された。柏原は学部4年生で佐藤との共同研究を開始し、50年後の2018年には京都賞と国際数学連合チャーン賞を受賞している。

本講演では、この代数解析学の考え方を、確率分布を例にとって説明し、D加群理論が確率分布の計算に応用できることを示した。その際、不連続関数を微分するため、通常の関数の世界ではなくシュワルツや佐藤によって導入された「超関数」の世界で計算する必要があることを説明し、関連して工学者ヘビサイドの業績や、ノーベル賞を受賞した物理学者ディラックとペンローズの超関数に対するそれぞれの見解を紹介した。代数解析学が純粋数学や理論物理のみならず、データサイエンス分野でも広く応用されるようになることを期待している。なお、本講演のスライドは講演者のホームページで公開している。

フーリエ解析とその応用

東京女子大学名誉教授　宮　地　晶　彦

周期関数f(x)は、その周期の整数倍の周期をもつ三角関数（サインとコサインの関数）に係数をかけたものの和として表すことができる。そのような和をフーリエ級数という。フーリエ級数の大切な原理のひとつは、無限和の収束などの詳細を無視すれば、関数f(x)には何も制限がいらず、どんな周期関数f(x)でもフーリエ級数で表すことができることである。もう一つの大切な原理は、f(x)をフーリエ級数で表すときの係数がf(x)と三角関数との積の定積分として定まることである。

フーリエ級数は、音や画像を信号に変えて送るときの原理であり、また光のスペクトル分析など複雑なものを単純なものの重ね合わせとして解析するときの原理であるので、現実世界のいたるところで利用されている。しかしそれだけでなく、理論的な数学の道具としても頻繁に用いられる。関数をフーリエ級数に展開すると、ちょうど通常の実数を小数で表して加減乗除の計算をするのと同じように、関数についての問題を具体的な計算に帰着させることができる。例えば、波動方程式や熱方程式などの偏微分方程式の解をフーリエ級数展開を利用して求めることは、数理科学科数学専攻の授業でもしばしば取り上げられるテーマである。また確率論、幾何学、代数学などにおいてもフーリエ級数は重要な道具として利用される。以下では、その一例として、ディリクレの素数の定理の証明を紹介しよう。

1以外の自然数で、1と自分自身以外では割り切れないものを素数という。2, 3, 5, 7, ... は素数である。素数が無限にたくさん存在することは、既にギリシアの時代から知られていた。ユークリッドによる単純明快な証明がある。オイラーは、素数pを含んだ或る分数のすべての素数pにわたる積と自然数n全体にわたる1/nの和との間に成り立つ等式（オイラーの公式と呼ばれる）を示して、素数は無限にあるだけでなく、素数の逆数の和が無限大であることを証明した。

自然数aとbを固定して、an+b（nは整数）の形の自然数を考える。aとbが共に1以外のある自然数cで

割り切れるなら、an+b の形の数はすべて c で割り切れるから、an+b の形の素数は存在するとしても高々ひとつである。（実際その場合、c が素数でかつ c=an+b と書けるときを除いては an+b の形の素数は存在しない。）では、a と b を共通に割り切る 1 以外の自然数がない場合（すなわち a と b が互いに素である場合）には、an+b の形の素数は存在するだろうか？　そのような素数は無限に存在するだろうか？　ディリクレは、a と b が互いに素である場合には an+b の形の素数が無限に存在することを証明した（ディリクレの素数の定理、1837 年）。

ディリクレの素数の定理の証明にはフーリエ級数の考え方が用いられた。一般に、有限アーベル群 G の上で定義され絶対値 1 の複素数の値をとる関数で、群 G から絶対値 1 の複素数の群への準同形になっているものを、G の指標という。G が有限アーベル群であれば、G には十分たくさんの指標が存在し、G 上の任意の関数は指標に係数をかけたものの和として表され、そのときの係数は元の関数と対応する指標とから内積の形で求められる。周期関数を三角関数の和で表すのと同様のことが有限アーベル群と指標に対して成り立つのである。

ディリクレは、彼の素数の定理を証明するのに、素数の逆数の和が無限大であることのオイラーによる証明のアイデアにしたがった。an+b の形の素数が無限に存在することを示すには、an+b の形の素数 p だけに限って 1/p の和をとったとき無限大であることを示せばよい。そのためにディリクレは、a をひとつ固定して、a と互いに素な各 b に対して an+b の形の数全体をひとつの「数」と見なしたとき、それらの「数」たちの間に掛け算が自然に定義され、それらが有限アーベル群（法 a の既約剰余類群と言う）をなすこと、したがって、その群の上で、指標に関するフーリエ級数展開が成り立つこと、を利用した。ディリクレは、オイラーの公式がこの群の指標を含んだ形に一般化できることを使って、an+b の形の素数 p だけに限って 1/p の和をとったものが無限大であることを証明したのである。

知恵の輪のトポロジー

早稲田大学教授　谷　山　公　規

パズル・おもちゃである知恵の輪にはいろいろなタイプのものがあるが、金属やプラスチックなどの変形しない部分に、紐のように変形可能なものが絡んでできている知恵の輪を、ハード・ソフト系知恵の輪と呼ぶことにする。本講演ではこのタイプの知恵の輪について、結び目理論の、より詳しく云えば空間グラフ理論の観点から解説した。結び目理論は数学の中の幾何学の中のトポロジー（位相幾何学）の中の一分野である。

議論の要点は、現実には変形しない金属部分が変形したと思考実験することにより、知恵の輪が外せること（解が存在すること）と、その具体的な外し方（解法）がともに分かることである。数学はもとより、ゼロ、マイナスの数、虚数、4 次元空間など、現実には存在しないように見えるものを数学的実在と考えることにより、現実世界にも応用のある数々の美しい理論を展開している。そもそも数とは何か、例えば 3 という数はどこにあるか、と問うとき、「3」は記号であり、「3 個のりんご」は目に見ることはできても、3 そのものはどこにも見ることができないことに気付く。このように現実には存在しないように思えるものを数学的実在と認識する力、理解する力、そしてそれをもとに理論を展開できる力を我々が有していることは、神秘的なことではないだろうか。

講演では実際に紐を使った「手錠の縄抜け」を、空間グラフ理論の世界的権威であられる新國亮先生（東京女子大学教授）にお手伝いいいただき実演した。また今回の講演会では厚芝幸子先生（東京女子大学教授）はじめ多くの方にお世話になった。この場を借りてお礼申し上げる。また、講演中にお見せした知恵の輪の商品名について質問があったが「エレクトロパズル（テンヨー製）」であることを聴衆の方からご教示いただいた。併せてお礼申し上げる。

今回の講演スライドは
https://taniyama.w.waseda.jp/twcu/topology-of-puzzle-rings-20231201.pdf
に置いてあるので適宜参照されたい。このスライドには、時間の関係で講演では紹介しなかった「迷路の明朗解法」についての記載もある。これも知恵の輪と同じく、変形しないはずの迷路の壁が変形したと思考実験することにより「右手法」（または「左手法」）という明朗な解法が存在するという話しである。

講演で取り上げた「知恵の輪はずし」では、ゴム紐が仮想線を 8 回横切ることで外せることを示したが、仮想線を横切らないと外せないこと、さらには 8 回横切らないと、つまり 7 回以下では外せないことが証明されている。この結び目理論の中でも空間グラフ理論の結果については以下の 2 つの論文を参照されたい。

J. Przytycki and A. Sikora
Topological insights from the Chinese rings
Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 3, 893-902.
https://www.ams.org/journals/proc/2002-130-03/S0002-9939-01-06093-2/S0002-9939-01-06093-2.pdf

K. Taniyama
Site-specific Gordian distances of spatial graphs
J. Knot Theory Ramifications 30 (2021), no. 14, 2141016 (15 pages)
https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218216521410169?journalCode=jktr
https://arxiv.org/pdf/1703.09440.pdf

仮想線を少なくとも１回横切らないと外せないことだけでよければ、以下の論文で示されている定理を使えば証明できる。

K. Taniyama
Irreducibility of spatial graphs
J. Knot Theory Ramifications 11 (2002), no. 1, 121-124.
https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218216502001512
https://arxiv.org/abs/math/0107007

上記論文は、３次元空間内の１次元の図形である空間グラフの性質を研究するために、２次元の図形である曲面を、補助線ならぬ補助面として使ったものである。トポロジーではもっとも基本的な研究方法の一つである。講演でもゴム紐の通り道としてのゴム膜という曲面が出てきている。３次元空間内では例外的な場合を除いて、２つの１次元図形は互いに交わらず、１次元図形と２次元図形は互いに交わらないか、交わるとすればその交わりは０次元図形、すなわちいくつかの点であり、２つの２次元図形は互いに交わらないか、交わるとすればその交わりは１次元図形となる。トポロジーではこのようなことを３次元に限らずいろいろな次元の空間で考える。これは一般の位置の理論と呼ばれていて、トポロジーの根底をなすものである。

以下の関連する参考文献・サイトも適宜参照されたい。

フジテレビ「たけしのコマ大数学科「結び目理論」」
https://taniyama.w.waseda.jp/komadai.html

日本数学会市民講演会「知恵の輪のトポロジー」の記録
http://mathsoc.jp/publication/tushin/1804/1804taniyama.pdf

Asia Pacific Mathematics Newsletter の記事（上記の英語版）
http://www.asiapacific-mathnews.com/05/0501/0006_0008.pdf

韓国での講演原稿
https://taniyama.w.waseda.jp/site-specific-KAIST.pdf

有限群とその表現

東京医科歯科大学名誉教授　清　田　正　夫

群は、現代数学におけるもっとも基本的な概念のひとつで、数学のあらゆる分野で用いられている。たとえば、位相群、リー群、代数群は、それぞれ位相空間、解析多様体、代数多様体に群構造を導入したもので、幾何学、解析学、代数学の主要な研究対象となっている。また、群論は対称性を記述する数学的言語として、科学一般、とりわけ、理論物理や結晶化学の分野で有効に使われてきた。さらに最近では、情報科学の暗号や符号理論のなかにも群が登場している。

群とは、演算の与えられた集合であって、その演算に関して、(G1) 結合法則が成り立ち、(G2) 単位元が存在し、(G3) 各元に対して逆元が存在するものとして定義される。３つの条件 (G1), (G2), (G3) を群の公理と呼ぶ。群の例として、整数全体の集合に演算として足し算を考えたものや、実数全体から０を除いた集合に演算として掛け算を考えたものがあげられる。整数全体の集合については、０が単位元で、整数 m の逆元は − m である。 実数全体から０を除いた集合については、１が単位元で、実数 a (≠ 0) の逆元は 1/a である。これらの群は演算に関して、(G4) 交換法則を満たすので、可換群またはアーベル群と呼ばれる。交換法則を満たさない群を非可換群という。３元集合上の全単射は６個あるが、それら全体は写像の合成に関して群をなす。この群を３次対称群と呼ぶ。３次対称群は「最小の」非可換群である。

群論の主要課題は群の構造の決定である。群の公理は非常に単純なので、これらだけでは深い理論は期待できず、何等かの付帯条件（交換法則や元の有限性など）を加える必要がある。交換法則を加えた理論をアーベル群論という。群の元の個数が有限であるという条件を課した理論を有限群論という。なお、有限アーベル群の構造は完全に決定されている。

講演では、群の定義からはじめ群の実例を4つ示し、ついで、群論とくに有限群論の基礎概念とふたつの定理、ラグランジェの定理とシローの定理を紹介した。ラグランジェの定理とは、有限群とその部分群について、部分群の元の個数は群の元の個数を割り切るというもので、整数論のフェルマーの小定理を導く、有限群論の基本定理である。ラグランジェの定理の逆は一般には不成立であるが、ある条件下で逆が成り立つことを主張するのが、次のシローの定理である。つまり、有限群において、群の位数（元の個数）を割る素数べきを位数とする部分群が存在する。例えば、位数36の群では、常に位数9の部分群が存在する。シローの定理は有限群の分類理論に多くの応用を持つ重要な定理である。

講演の後半では、群論の研究に欠かせない手法である、表現論の基本事項を解説し、表現論の典型的な応用例として、バーンサイドの有名な定理を証明した。表現論とは、抽象的に定義されている群の性質を、より具体的な一般線形群と関連付けて研究する分野で、有限群の構造に関する定理の証明に威力を発揮する。英国の数学者バーンサイドは、群表現論を応用して、位数の素因数が2つである有限群は常に可解群であるという結果を証明し、1904年に論文発表した。例えば、位数36の群は14種類存在するが、バーンサイドの定理からすべて可解群である。可解群とは、アーベル群を積み上げて構成される群で、歴史的にはガロア理論において初めて登場した。代数方程式がべき根で解ける必要十分条件は代数方程式のガロア群が可解群になることである。3次対称群と4次対称群は可解群であるが、5次以上の対称群は可解群ではない。したがって、5次以上の代数方程式は解の公式を持たない。

講演で紹介したバーンサイドによる証明は、シローの定理も使われているが、その本質は既約指標の直交関係の巧みな適用である。バーンサイドの定理は、発表から約70年後に、ベンダー、ゴールドシュミット、松山によって表現論を使わない純群論的証明が得られている。しかし、彼らの証明は長く複雑なので、バーンサイドの簡潔な証明は現在でも不滅の価値を有している。
講演内容の詳細について、次のURL
http://bit.ly/3Hs5vTg
に講演スライドと講演原稿が置いてある。

編集・発行　東京女子大学学会